Капиталистическая математика

академик В.П.Маслов

20th February 2005

Contents

Мне говорят, ведь вы химик, а не
экономист, зачем же входите не в свое дело?
На это необходимо ответить тем,
что истинного, правильного решения экономических
вопросов можно ждать впереди только от
приложения опытных приемов естествознания.
Д.И.Менделеев

Многие экономисты, ставшие бизнесменами и хорошо разбирающиеся в рыночной экономике и ее неписаных законах, мне говорили, что классическая теория вероятностей "не работает" для их нужд. Это же подтвердил в своем эссе Дж. Сорос. Особенно важными в этом отношении для меня были беседы с доктором экономических наук В.Н.Батуриным.

Блестящие глубокие результаты, изложенные в двухтомнике А. Н. Ширяева "Финансовая математика", основаны по сути на презумпции справедливости. Иначе говоря, выводы, приводимые в работе А.Н.Ширяева, сводятся к решению проблемы: как уравновесить данные, величины, чтобы все было совершенно справедливо. Но на "диком" рынке каждый думает о том, как выгадать и выиграть, а не как поступить по справедливости по отношению к своему сопернику или партнеру. И прежняя (классическая) арифметика не годится для людей, стимулом которых является, грубо говоря, нажива. О психологических аспектах стимула наживы для человека ("выиграть и нажиться как можно больше"), будет особо сказано ниже. Во всяком случае, в рыночной ситуации даже арифметика становится не такой точной наукой, какой она должна быть. Это хорошо отражено в одном известном анекдоте еще времен советской власти.

В школу товароведов должен приехать инспектор для проверки уровня знаний, и учитель предварительно опрашивает своих учеников: „Иван, сколько будет пятью пять?“ – „Тридцать шесть.“ – „Неправильно. Василий, сколько будет пятью пять?“ – „Ээ, тридцать пять.“ – „Боже мой, сколько раз вам говорить, пятью пять будет двадцать пять, но максимум - двадцать шесть.“

Этот прагматический момент, который меняет даже таблицу умножения, должен быть учтен, когда строится математика, отражающая

рыночные отношения. В данной работе мы разрабатываем "капиталистическую математику", отвечающую рыночной экономике, переходя к абсолютно новым категориям. Эта математика другой планеты, другого королевства - „королевства кривых зеркал“. В [1] я писал, что, может быть, где-то на другой планете предпочитают именно эту математику. Она зависит от некоторого параметра: при значении параметра равного нулю эта математика превращается в обычную, а при значении параметра равного бесконечности превращается в идемпотентную, как я назвал ее. Но лучшее название, закрепившееся за ней, - "тропическая" математика.

О среднем и матожидании

§1. Вы подбросили монетку и на орле выиграли 5 рублей, на решке - проиграли 5 рублей. Среднее - вы остались при своих. Осреднее как будто бы правильное. Теперь предположим, что вы средний служащий или научный сотрудник. На орле выиграли 100 тысяч долларов, на решке проиграли эту сумму. Выигрыш в 100 тысяч позволяет вам несколько улучшить жизнь, может быть, купить мерседес. Проигрыш - почти самоубийство, вы продаете квартиру и становитесь бомжом, садитесь за неуплату в тюрьму и т.д. Среднее не есть ваша жизнь до игры. Проигрыш много бóльшая потеря, чем улучшение жизни при выигрыше. Есть еще и психологическая сторона вопроса. Пусть у вас имеется четверо детей. Выигрыш - вы рожаете еще одного ребенка, проигрыш - один из детей умирает. Среднее не есть ваша жизнь до этих изменений. Моральная потеря от проигрыша несоизмеримо превышает удовольствие от выигрыша. Моральный, психологический эффект при осреднении играет здесь решающую роль. Поэтому естественно, что одни из первых, кто стал ревизовать арифметическое среднее и матожидание, были матпсихологи. Отмечу прежде всего работу A.Pollatsek и A.Tversky 1970 года [3] в журнале математической психологии, а также работы [4, 5, 6] 1984-86 годов в том же журнале и работу [7] в журнале экспериментальной психологии. В этих работах в известной мере учитывались национальные особенности(см. напри-

мер, [8]). Поэтому в данной работе остановимся подробнее на изменении психологии и менталитета в России. Не являясь специалистом в этой области, я приведу лишь общеизвестные примеры и мои личные наблюдения.

Еще до специалистов-матпсихологов математики, начиная с Эйлера, использовали понятия функции полезности и риска.

Предположим, что вместо того, чтобы заплатить 150 рублей, нам предлагают игру. Один раз бросается монета. Если выпадает орел, то выплачивают 200 рублей, а если решка, то 100 рублей. Среднее арифметическое – 150 рублей, т.е. игра, таким образом эквивалентна выплате 150 рублей.

Если сумма 100 руб. нас вполне устраивает, мы хотим рискнуть, ведь если выпадет 200 руб., то мы можем купить, может быть, не столь необходимый, но приятный для нас предмет (50 руб. мало для его покупки). В этом случае такая игра нам по душе. Но если для жизни нам необходимо 120 рублей, то мы предпочтем продать эту игру за 120 рублей, чем рисковать получить только 100 рублей.

В такой игре полезность - 120 - есть нелинейное среднее от 100 и 200 рублей. Риск при этом нулевой.

В силу того, что функция полезности существенно зависит от обстоятельств, то казалось бы, в разных ситуациях она будет разной. Степень риска тоже, вообще говоря, может быть разной, и этот "параметр" тоже в известной мере психологический и поэтому трудно определяемый.

Отметим, однако, что "предпочтение" без риска в данном примере составляет 20% от полуразности $\frac{200-100}{2} = 50$, т.е. от выигрыша при риске.

Естественно ожидать, что если вместо 100 будет стоять число 105 или 110, а вместо 200 - 205 или 210, то "предпочтение" без риска также будет составлять 20%: 125 руб. и 135 руб. соответственно.

Есть еще одно важное обстоятельство, которое позволяет однозначно определить формулу для нелинейного сложения. Предположим, что мы хотим положить две копейки в два равноценных банка. Сколько у нас возможностей? Мы можем положить обе копейки в первый

банк, или обе копейки во второй банк, или по одной копейке в каждый из банков. Итого три возможности. Если же мы хотим положить в банк два бриллианта, то возможностей будет четыре, т.к. решив положить два бриллианта в два банка, мы можем поменять бриллианты местами. В то же время менять местами копейки бессмысленно. Свойство тождественности купюр одного достоинства позволяет изменить число вариантов. Эта статистика, как статистика тождественных бозе-частиц, называется бозе-статистикой, а статистика бриллиантов (если они не абсолютно тождественны) - статистикой Больцмана. Этот факт наряду с линейностью добавки к каждому члену суммы позволяет однозначно определить функцию нелинейного сложения, точнее однопараметрическое семейство таких функций, при двух крайних значениях параметра (ноль и бесконечность) переходящее соответственно в обычную "социалистическую" математику или в "тропическую" математику. Эта последняя была применима в нашей стране в конце 80-х - начале 90-х годов прошлого века, когда в газетах можно было встретить объявления типа „меняю квартиру на "Москвич"“. За один доллар (который на черном рынке стоил 30 руб.) можно было тогда купить в России кубометр строевого леса, а в Нью-Йорке – билетик в метро. Подобный неравноценный обмен в свое время осуществляли африканцы, которые меняли золото и жемчуг на зеркальца и разные побрякушки. Поэтому такая математика имеет основания называться „тропической“, что за ней и закрепилось.

Сейчас экономическая ситуация у нас в стране совсем другая. А в те времена такой большой параметр, как доллар, который ценился у нас в стране примерно в двести раз дороже, чем он реально стоил за границей, позволял перейти к "тропической" арифметике. Для этой арифметики соблюдалась дистрибутивность, мультипликативность и все прочие арифметические законы, только все числа были положительные, поэтому это было полукольцо. В ней было деление, но не было вычитания.

Этой предельной математике был посвящен ряд работ (см. например [9]). На ее основе строилась теория вероятностей, в которой предел имеет определенный экономический смысл. При игре в орла и решку

при $N \to \infty$ вероятность выпадения орла и решки одинаковая. Но если играть в орла и решку с жуликом, который ставит на орла, то вероятность орла в конечном пределе может оказаться равной единице.

Формулы для функции предпочтения, или функции полезности, которые восходят к Лапласу, основаны на том, что число испытаний конечно и при конечном числе испытаний есть риск, что мы не получим то число, которое получится в пределе при очень большом числе испытаний. Поэтому о единственности нелинейной функции предпочтения говорить нельзя, она зависит от обстоятельств и психологии. Мы рассматриваем функции Массе и Эшера [8] как наиболее близкие к той, которую мы выведем ниже исходя из аксиоматики полуколец. Эта задача аналогична физической задаче для небольшого числа частиц. Физики до сих пор не могут вывести формулы для небольшого числа частиц, даже для идеального бозе-газа. Они сейчас бьются над формулами хотя бы для ста частиц (а не только для 10^{23}), т.к. этот вопрос очень актуален в связи с теорией ловушек.

Отметим,что формула Массе или формула Эшера для очень большого числа испытаний при параметре, по которому осуществляется переход к пределу, не приводят к результатам классической теории вероятностей, а дают совсем другие ответы. Этот эффект связан с тем, что два предела не совпадают между собой, когда они меняются местами. Тот важный факт, что они не совпадают, позволяет объяснить целый ряд экономических эффектов. Утверждение о том, что формула Массе или формула Эшера применима для большого числа элементов, уже само по себе является аксиомой. Эти авторы получали свои формулы из эмпирических соображений: в каких-то примерах формула работала лучше, в каких-то хуже.

В математике тем не менее можно строго вывести близкую формулу, исходя из упомянутых выше двух важных соображений. Во-первых,деньги, которые в экономике играют очень существенную роль, подчиняются статистике Бозе, а не статистике Больцмана. В связи с этим формулы Массе изменяются. Статистика Бозе-Энштейна тоже подчиняется некоторой арифметике, некоторому полукольцу. Мы преломляем внешний мир через наше восприятие, как считали Мах и

Авенариус, и попадаем в "королевство кривых зеркал".

Второе соображение состоит в следующем. Возьмем общее полукольцо и выберем такую арифметику, которая ближе всего к линейной. Иначе говоря, такую, при которой добавление одного и того же числа к каждому элементу суммы дает добавление этого же числа к осредненному. Это естественное свойство выполняется и для формулы Массе и для формулы Эшера.

§2. Прежде чем говорить о случайности и закономерности рыночных отношений, коснемся старого философского вопроса о роли личности в истории.

Если считать, что роль отдельной личности столь велика, что воля одного человека может поворачивать "колесо истории", то следует прийти к выводу, что моделирование исторических процессов невозможно. Роль личности, действительно, велика. Но на каких исторических промежутках действуют законы истории, если таковые вообще существуют, но еще не открыты? Конечно, на большом отрезке времени смена формаций имела место - это неопровержимый факт. А действуют ли какие-либо законы, если им "не мешать", на не столь большом промежутке времени? По крайней мере Лев Толстой отвечал на этот вопрос положительно (см. [10]).

Согласно обывательской точке зрения не существуют общих глобальных законов экономики и динамики финансов. Аргументация: "Все зависит от решения разных корпораций, олигархов, правительств, финансового шпионажа и т.п."

Такая же ситуация была характерна для физики: поведение большого числа частиц существенно зависит от начальных условий их расположения и скоростей, однако когда число частиц достигает 10^{23}, то вступают в силу новые законы. И эти основные законы до сих пор строго не выведены из исходных законов механики Ньютона.

По этому поводу известен спор Больцмана и Пуанкаре. Великий французский математик Пуанкаре указывал, что теория газа, т.е. большого числа частиц ($\approx 10^{23}$), которую предложил Больцман, противоречит динамической теории, основанной на уравнениях классической механики Ньютона. И до сих пор общепринятая теория Больцмана,

как и распределение Гиббса, строго не обоснованы с точки зрения постулатов классической механики.

Если рассматривать динамику цен акций и изменение рынка локально во времени и пространстве, то перейти от нее к глобальной картине просто невозможно, поскольку первая действительно зависит от воли влиятельных фигур, психологии масс и отдельных людей, политической обстановки и т.д.

Тем не менее такая картина существует, как мы увидим из дальнейшего, и что самое удивительное, - она близка к квантовой статистической теории, что по-видимому на интуитивном уровне понимал великий знаток рынка Джорж Сорос, который говорил о "принципе неопределенности" как об основном принципе рынка, имея в виду некий принцип, аналогичный, судя по использованному термину, принципу неопределенности Гайзенберга.

Более простой и более частный вопрос: существуют ли законы рыночной экономики? Если существуют, то на каком временном отрезке они действуют? Были ли люди (не ученые, а предприниматели или коммерсанты), которые интуитивно чувствовали такие законы, и, действуя в соответствии с ними, богатели? На существование таких законов первым указал Адам Смит.

В качестве такого примера я приведу человека, который настолько верил в незыблемость законов экономики, что разбогатев, затем сильно просчитался. Это П.П.Рябушинский, который умножил свою коммерческую империю, несмотря на сопротивление (это очень важно: не на поддержку!) властей. Он был убежден, что режим коммунистического правления падет, но не за счет сопротивления белых сил или интервенции, а за счет законов экономики. Во время НЭПа он считал, что режим уже рушится и побеждают законы экономики. Однако он ошибся. Огромный революционный подъем активной массы населения привел к другому закону (уравнительному), как бы к обычному закону "среднего арифметического". Этот закон держался довольно долго, пока столь же внезапно не рухнул, как рухнули во время революции законы экономики, в которые интуитивно верил Рябушинский.

В той схеме, которую мы предложим в этой работе, заложены по-

добные "фазовые переходы". Они удивительным и неожиданным образом перекликаются с квантовой статистикой и той наукой, которая сейчас бурно развивается, пока на чисто интуитивных аналогиях – эконофизикой.

Как выяснилось из той вполне естественной аксиоматики осреднения, которая приводится ниже в этой работе, существует и другая, нелинейная арифметика, одна единственная и, возможно, с точки зрения морали несправедливая. Но законы этой арифметики движут рынком на некоторых этапах более интенсивно, чем правила линейной арифметики. Это, по-видимому, те законы, на которые намекал Джорж Сорос в своей философской статье [13] и на которые интуитивно полагался П.П.Рябушинский как на некую другую "гармонию".

Так вот она, гармония природы,
Так вот они, ночные голоса!
Так вот о чем шумят во мраке воды,
О чем, вздыхая, шепчутся леса!
Лодейников прислушался. Над садом
Шел смуглый шорох тысячи смертей.
Природа, обернувшаяся адом,
Свои дела вершила без затей.
Жук ел траву, жука клевала птица,
Хорек пил мозг из птичьей головы,
И страхом перекошенные лица
Ночных существ смотрели из травы.
Природы вековечная давильня
Соединяла смерть и бытие
В один клубок, но мысль была бессильна
Соединить два таинства ее.
(Н.Заболоций "Лодейников")

Разумеется, когда мы сажаем газон, поливаем его, посыпаем дустом от жучка, это тривиальная гармония, и то, что "природа вековечная давильня", как закон Мальтуса для рынка, есть также гармония. В этом, действительно, заключается некое "таинство".

Именно два "таинства", две арифметики управляют каждая своим

стратом общества. В конце 80-ых годов автор попытался проанализировать соотношение двух "таинств" в нашей стране. В то время их разграничение в нашей экономике было более явным. И автору удалось спрогнозировать целый ряд простых, естественным образом вытекающих из этого соотношения эффектов, таких, например, как спонтанное появление второй валюты – доллара, распад СССР, падение покупательной способности доллара в среднем в 150-200 раз [12].

Сейчас ситуация изменилась и действуют в основном законы нелинейной арифметики, несправедливые, но столь же "гармоничные".

В настоящей работе мы не будем заниматься сопоставлением двух "таинств" сегодняшней экономики в рамках финансовой математики, т.к. это очень сложная статистическая задача. Полагая, что нелинейная экономика в основном победила в нашей стране, мы остановимся только на ней.

Тем не менее нужно отдавать себе отчет, что обе арифметики – линейная и нелинейная – сосуществуют и в настоящее время. Однако нелинейная (рыночная) настолько быстро вытесняет линейную, что последнюю можно и не учитывать в расчетах. В самом деле, если учитель, профессор в вузе или врач получает в месяц порядка 100 долларов, то он невольно начинает продумывать нелинейные варианты, чтобы его семья не нищенствовала. Времена, когда моя мать учила: "Никогда нельзя работать ради денег", безвозвратно прошли. Тем не менее в то время мой отчим – профессор, зарабатывал вполне достаточно, чтобы мы жили очень хорошо и свободно, не приобретая, правда, ни движимой ни недвижимой собственности. Он никогда не брал работы ради заработка, а только ради интереса и пользы для науки. Теперь уже само слово "интерес" стало приобретать денежную окраску. Поэтому такой менталитет постреволюционных и предреволюционных (для части интеллигенции) времен современному поколению может быть абсолютно не понятен. Однако отмечу, что и сейчас большое число старых профессоров работают, получая гроши (может быть, придумывая себе какой-нибудь приработок - "халтуру"), но не представляют себе жизни без своей работы, настолько они любят свое дело и верны ему.

Тот факт, что в силу естественной аксиоматики осреднения остается только две "арифметики" – одна линейная, традиционная, и только одна нелинейная, – носит несколько мистический характер (поэтому возникает ассоциация с двумя божественными "таинствами" Заболоцкого). Это впечатление усугубляется еще и тем, что нелинейная арифметика с точностью до наоборот (при замене min на max или $-$ на $+$)в значительной мере совпадает с квантовостатистическими представлениями о бозе-газе.

Самые сложные расчеты связаны с переходными периодами, когда одна часть общества живет по одной "арифметике", а другая – по другой, или когда часть товаров исчисляется по старым рублевым ценам, а часть по у.е. (условным единицам, эквивалентным долларам). Именно такие расчеты проводили автор и его группа в конце 80-х годов.

Обе арифметики сосуществуют, например, и в таможенной политике. Для фритрейдеров, стоящих на позиции снятия таможенных заслонов, "работает" капиталистическая математика. А при учете таможенных заслонов ситуация существенно осложняется.

Аналогии финансовой теории с квантовой статистикой проявляются в ряде факторов, но вместе с тем есть и существенные различия. Сначала остановимся на аналогиях.

1) Купюры одного достоинства неразличимы, как неразличимы бозе-частицы.

2) Эффект пробоя курса акций математически аналогичен эффекту фонтанирования сверхтекучего гелия при нагревании капилляра (эффект открыт Дж.Алленом в 1933 г.).

3) В финансовых системах имеет место аналог фазового перехода в конденсат.

4) Имеется прямая аналогия с термодинамикой, причем роль интенсивных величин и энергий играет значение случайной величины, а роль экстенсивных величин играют частотные вероятности. Имеются и сопряженные пары: значение случайной величины λ_i и ее вероятность P_i.

5) Может быть предъявлен гамильтониан финансовой задачи, и имеет место принцип неопределенности.

Существенные различия заключаются в следующем. Во-первых, принцип "энергетической выгодности", согласно которому в квантовой статистике частицы занимают нижние энергетические уровни, заменяется принципом финансовой выгодности, в соответствии с которым "игроки" пытаются получить максимальную прибыль, т.е min заменяется на max, а знак $-$ на знак $+$. Это может существенно отразиться на математических следствиях. Во-вторых, в гамильтониане финансовой задачи взаимодействие зависит от уровня энергии.

Кроме того в нашей теории рассматривается асимптотика при $N \to \infty$, где N – аналог числа испытаний в теории вероятностей и числа частиц - в квантовой статистике, и при этом N_i (аналог числа выпадений в теории вероятностей и числа частиц на $i-$том уровне энергии в квантовой статистике) необязательно стремится к бесконечности (в тех теориях, как правило, $\frac{N_i}{N} \to \text{const} > 0$). Поэтому сама асимптотика в нашем случаев нашем случае существенно отличается как от асимптотики в квантовой статистике, так и от самого понятия вероятностей, как указанного предела. В квантовой статистике и в частотной теории вероятностей членами N_i, такими, что $\frac{N_i}{N} \to 0$, по существу пренебрегают. У нас же, как это будет видно из дальнейшего, они могут играть весьма существенную роль. Ведь все лотереи построены на том принципе, что хотя вероятность выигрыша практически равна нулю, выпадение тем не менее возможно, и игроки надеются на удачу: вдруг повезет!

Еще один обобщающий момент отличает предложенную теорию от теории вероятностей. Впрочем это отличие от теории вероятностей относится и к квантовой механике и к спектральной теории операторов в функциональном анализе.

В квантовой механике, как известно, интеграл по области Ω от квадрата собственной функции оператора энергии (гамильтониана) определяет вероятность пребывания частицы в области Ω. Собственная функция при этом нормируется на единицу (интеграл от ее квадрата по всему конфигурационному пространству полагается равным единице).

Если спектр непрерывный, то интеграл от квадрата "собственной

функции" расходится. Тогда, как правило, нормируют функцию по конечной области, чтобы можно было сравнивать вероятность пребывания частицы в разных областях. Это как бы определяет "относительные ценности". Особенно часто такая нормировка по области удобна при рассмотрении зависимости от дополнительного малого параметра (например, квазиклассической асимптотики). Такой пример мы приведем в соответствующей главе о связи с квантовой теорией.

Похожие механизмы используются и в спектральной теории операторов для определения спектральных плотностей в случае операторов с непрерывным спектром.

В приводимой ниже теории такие ситуации также могут встречаться. Поэтому нормировку при осреднении можно выбирать, используя подмножества всех коэффициентов осреднения. Это позволяет иногда получить дополнительную информацию о поведении финансового осреднения при возрастании числа игроков.

1 Психология рынка

1.1 Роль азарта в игре

Когда я стал академиком и стал свободно ездить за границу, меня очень удивил менталитет западных людей. Одна молодая дама, племянница миллионера, держащего сеть магазинов в Нью-Йорке и Париже, довольно богатая судя по ее роскошной квартире и всей внутренней обстановке рассказывала мне, как она сделала бизнес, перепродав своей приятельнице одну антикварную вещь, которая ей очень нравилась, но она польстилась на предложенную большую цену. Она очень гордилась этой выгодной сделкой, хотя с точки зрения нашей морали ни наживаться на своих знакомых, ни расставаться с любимыми вещами ради получения прибыли не могло считаться похвальным.

Можно вспомнить также Блюменталя, персонажа из романа Э.-М.Ремарка "Три товарища" который перепродал свой "кадиллак" по более дорогой цене, хотя не должен был этого делать, не помню, почему именно. Он объяснил герою романа, что сделал это в силу своего

принципа - не упускать возможность выигрыша, нарушение же этого принципа он считал плохой приметой.

В менталитете тех, кто покупал и перепродавал и с точки зрения социалистической и коммунистической морали поступал некрасиво, высоко ценился выигрыш от сделки и связанный с этим азарт игры. Для таких людей это отнюдь не бизнес и не страсть к накопительству, как у "Скупого рыцаря", это азартная игра, которой они отдаются со страстью. Живым примером такой натуры был Достоевский, который играл в рулетку. Это была его страсть, его жизнь. Его жена не могла остановить его ничем, он играл, проигрывал и снова играл. Он замечательно описал это в своем романе "Игрок", где показал, что основную эмоциональную нагрузку несет сам процесс игры.

Выгодная сделка, независимо от ее материальной ценности - это выигрыш, победа в игре, что может вызывать колоссальный душевный подъем. И наоборот, даже небольшой проигрыш для таких азартных людей может оказать очень сильное негативное влияние на моральное состояние. Так, герой одного рассказа Чехова после того, как он проиграл совсем небольшую сумму, закричал на сына: "Ванька, иди сюда, я тебя выпорю за то, что ты вчера стекло разбил".

Такой психологический момент, как азарт в игре наживы, а также конкуренция на рынке ценных бумаг и в спекуляционной деятельности играет очень важную роль в рыночных отношениях. Он должен быть положен в основу "капиталистической" математики, которую мы здесь развиваем.

Образно говоря, для азартного игрока выигрыш, положим, в пять рублей по сравнению с выигрышем в один рубль приносит удовольствия больше не в пять раз, а во много раз больше. Таким образом, чисто психологически, небольшой выигрыш или небольшой проигрыш как бы возрастает благодаря эмоциональной составляющей. Объясним это более обстоятельно.

Свои эмоции, связанные с исходом игры, человек передает и другим людям, например, своим знакомым. В наше время связь между людьми очень хорошо налажена: есть мобильные телефоны, электронная почта и т.п. Поэтому информация о выигрышах и выгодных сделках

очень быстро распространяется. И когда мы говорим о выигрыше или проигрыше одного человека, мы по существу имеем в виду некоего типичного персонажа и рассматриваем не конкретное лицо, а некоторого среднего человека, который берется из толпы, из множества людей. Выше мы рассматривали психологию одного игрока, а когда берется человек из толпы, нужно учитывать психологию масс, которая как бы аккумулирует психологию индивидуумов. Кто наблюдал революционный подъем в ситуации, когда одни заражают других, тот понимает в чем дело. Мы видели по телевизору в 1993 году события перед Белым домом, когда совершалось почти восстание: парламент сидел в Белом доме, толпы захватывали мэрию, а милиция была бессильна. Есть выражение: "На миру и смерть красна". Оно отражает именно такую ситуацию - заразительность энтузиазма восстания. Поэтому, когда мы говорим о психологии среднего человека, на самом деле имеем в виду осредненную психологию сообщества людей. Психология масс, как известно из истории, меняется со временем. В мире рынка, бизнеса, наживы она приводит даже к сращиванию бизнеса с криминалом.

Таким образом, чтобы усилить исход игры, например проигрыш, нужно использовать какую-то нелинейную функцию, которая делает его более существенным. При построении математической модели рынка нужно также иметь в виду, что при капитализме, социализме и в переходном периоде рынок характеризуется своими особенностями.

В изложенном стандартном подходе к обычной теории вероятностей мы получаем в ответе как бы независимость различных матожиданий, т.е. смешанные производные по ним равны нулю.

Но как мы говорили, реальный мир отражается в нашем мозгу (точнее в нашем совместном восприятии) нелинейно. Это нелинейное отображение реального (справедливого) мира в воображаемый мир, в котором как раз и вырабатываются наши отношения, имеет и обратное отображение, в котором уже должна иметь место независимость различных математических ожиданий. Это приводит к аксиоме, которая сильно отдает махистской философией, когда-то осужденной советской философией.

Наличие одной универсальной нелинейной функции от одной пе-

ременной - это самая простая нелинейная концепция, которую можно придумать. Это аксиома нелинейности в ее простейшем варианте.

Линейная функция, разумеется, удовлетворяет всем приведенным аксиомам, а кроме того имеется *единственная* нелинейная функция, которая тоже им удовлетворяет.

Поскольку с ее помощью объясняется целый ряд финансовых законов, полученных из наблюдений, и кроме того прослеживается ее глубокая связь с физикой – квантовой статистикой, квантовым хаосом, принципом неопределенности Гайзенберга, и с другой стороны, с оптимальным кодом, соответствующим колмогоровской сложности, то приведенная аксиоматика, можно сказать, отвечает тому, о чем только можно мечтать.

Построим сначала эту новую "арифметику" исходя из вышеупомянутой идеалистической концепции, но затем, добавив совершенно естественную аксиому, убедимся, что эта же "арифметика" следует из общих нелинейных преобразований линейной картины после психологической переработки линейной арифметики. Таким образом, в общем случае нелинейных отображений линейного многообразия

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad \sum \alpha_i = 1, \quad y \to G(y'), \quad x_i = G_i(x_i')$$

при условии выполнения еще одной вполне очевидной аксиомы мы все равно приходим к той же арифметике. Этим самым мы избегаем априорного предположения, что в результате психологической переработки обычной арифметики (то есть классической теории вероятностей)обязателен переход в некоторую стройную картину другой нестандартной арифметики. И тем не менее система естественных аксиом приводит нас к "нестандартной" арифметике, на основе которой строится новая рыночная теория вероятностей.

1.2 Роль денег в разные периоды экономического развития

Деньги у нас в стране играют не столь большую роль, как, например, в США.

Один из молодых учеников А.Н.Ширяева говорил мне, что он не любит США, т.к. там оценивают людей по их доходу. Действительно, это, на мой взгляд, нелепо и равносильно тому, чтобы оценивать достоинство книги по гонорару, который она приносит автору. Тем не менее, доход там определяет не только уровень жизни, но и социальный статус. Моя родственница, работающая в Англии, говорила, что она переходит на другую работу, поскольку там больше платят. „Но ведь тебе вполне хватает жалования и на этой работе, и ты любишь этот коллектив, а сколько ты получаешь - ведь это секрет и никому не сообщается.“ – „Однако когда я перехожу в другую фирму, меня спрашивают, сколько я получала на старом месте, а это больше значит, чем дипломы.“

За границей привыкли считать каждую копейку. Школьница просит мою дочь в Англии разрешения позвонить с ее телефона брату и за это предлагает взять мелочь, т.к. звонки по телефону там стоят денег. Ученик колледжа просит закурить у своего товарища и отдает ему деньги за одну сигарету

У нас родительский дом или квартира переходят, как правило, из поколения в поколение. Там же, как правило, ради хорошо оплачиваемой работы легко бросают свое жилье, переезжают в другой город, сдав свою квартиру и сняв другую. Главное там – деньги, а не близость к родному дому, друзьям и т.д. Небольшое увеличение заработка, в принципе несущественное для жизни и без того вполне благополучной, может придать человеку другой статус. У нас богатство чаще всего не приносит уважения, а наоборот, как правило, вызывает подозрение в жульничестве. Тем не менее не раз я слышал, что раз такие-то люди богаче, то они умнее. Особенно если эти люди относятся к одной, скажем, нации, то эта нация умнее других.

Я лучше многих европейцев знаю менталитет Индокитая. Там торговая нация - китайцы. Как говорила моя жена, если вьетнамец хорошо торгует, значит за его спиной стоит китаец. Возможно, например, умение играть в шахматы передается в генах, но человек, хорошо играющий в шахматы необязательно умен. Так же и критерий ловкости в приобретении богатства как мера ума абсолютно неприемлем.

При режиме Пол Пота в Кампучии деньги были вообще отменены. Всем выдавалась одинаковая одежда, даже иностранным послам (их было только два - вьетнамский и китайский). Когда у вьетнамского посла оторвалась и потерялась пуговица, он должен был съездить во Вьетнам, чтобы там ее купить. У нас в стране роль денег была незначительна, когда действовали карточки, пайки, спецмагазины, а билеты в театры распространялись по учреждениям. Вспомним плакат в романе "Золотой теленок": "Пиво только членам профсоюза". Квартиры выдавались бесплатно, как робы в Кампучии. Очереди, очередность были возведены в определенный культ. Перепродажа своей очереди каралась как спекуляция. Дачные участки выдавались бесплатно по учреждениям. Однако существовало ограничение на площадь под строительство - не более $60m^2$ *жилой площади.*

Высшее руководство получало все блага в основном бесплатно, но они не передавались по наследству. Как только должностное лицо лишалось поста, то автоматически лишалось и этих благ.

Квартиры для номенклатуры были оборудованы первоклассной мебелью, дачи снабжены буфетной, кинозалом, бильярдной и обслуживались казенной прислугой, киномехаником, шофером. При книжных магазинах были так называемые книжные экспедиции, через которые можно было дешево покупать книги по искусству и другие дефицитные издания. Продовольственные и промышленные товары распространялись через сеть "спецмагазинов" в виде пайков и заказов. Для общения использовались специальные линии связи: "кремлевский" телефон, "вертушки". Однако в деньгах, денежных купюрах номенклатурные работники были ограничены. Так, например, сын министра, ухаживавший за моей сестрой, воровал у отца книги по искусству, продавал их в комиссионном магазине и на эти деньги покупал зимой розы в спецмагазине. Когда они поженились, то им выдали небольшую квартиру в очень хорошем доме. Для этого министру надо было звонить в какие-то инстанции по своей "вертушке". После того как эта пара разошлась, а сын министра женился на подруге сестры, она с грустью говорила: "Теперь вертушка вертится для другой".

Эта система распределения благ была хорошо продумана и препят-

ствовала коррупции, поскольку не было разрыва между обладанием властью и обладанием материальными благами. Во Вьетнаме такая система не была столь тщательно разработана, и это быстро привело к коррупции.

По тому, как сейчас живут их потомки, можно легко определить, что даже тайно частным капиталом номенклатурные работники не владели. Например, у моей хорошей знакомой, дочери одного из Генеральных секретарей догорбачевского периода, и ее мужа профессора, до сих пор нет собственного автомобиля. [1]

Московские квартиры передавались по наследству, но в провинции семей первых секретарей обкомов выселяли из казенных квартир.

Такое почти плановое распределение благ не требовало, естественно, принципиального перехода к другой математике. Во времена развития теневой экономики огромную роль играл бартер, обмен товаров на товары же, что не приводило к новой статистике (бозе-статистике).

2 Основные принципы капиталистической математики

2.1 Два подхода в теории вероятностей

В теории вероятностей есть два подхода. Один теоретический, а другой - экспериментальный. Например, в игре в орла и решку теоретически орел и решка выпадают с одинаковой вероятностью, равной 1/2. Можно подсчитать эти вероятности и экспериментально: подкинуть монету 100 раз, подсчитать, сколько раз выпал орел и сколько раз решка, и каждое показание поделить на сто, т.е. на число бросаний. Мы получим частотную, или экспериментальную, вероятность выпадения орла и решки. Я как человек, который в детстве играл в орла и решку, могу сказать, что вероятность 1/2 никогда не оправдывалась на практике. С чисто прагматической точки зрения выпадение орла

[1] Чуть ли не единственный, кто не боялся наживаться и строил дачу сыну, был министр внутренних дел, близкий друг Брежнева, Щелоков. Но всем известно, что все это кончилось для Щелокова и его жены самоубийством.

или решки подчиняется несколько другим законам. В эту игру играют так: монетку кладут между указательным и большим пальцем и ногтем большого пальца подкидывают. Дальше смотрят: ее поймали на орле или на решке. Я, например, научился так ловить (хотя это было и нелегко, так как монета быстро вращалась), что гораздо чаще выпадала та сторона, которая мне была нужна, и экспериментальная вероятность не равнялась 1/2. А один из моих товарищей умел делать так: он ловил и пальцами чувствовал, где орел, а где решка, и после того, как он разжимал кулак, монетка оказывалась у него либо на пальцах либо на ладони. Он так ловко переворачивал монету, что всегда получал ответ, который ему был нужен. Это, конечно, некоторое жульничество, но тем не менее в теории вероятностей, которая отвечает рынку, известная "свобода жульничества" / должна быть учтена.

Возьмем ситуацию, когда жульничество разрешено. Тогда этот игрок в 100 процентах случаев получал, например, орла. По теории вероятностей вероятность того, что в ста случаях из ста выпадет орел, чрезвычайно мала, а на практике она оказалась равной единице. Когда мы в реальной жизни наблюдаем за некоторым игроком, мы можем вычислить такую экспериментальную вероятность. Но это, конечно, не решение проблемы, и значит, по таким вероятностям мы должны как-то осреднять. С этим и связан принцип неопределенности, о котором говорил Джорж Сорос. Если у нас неточно определена величина выигрыша, т.е. мы неточно знаем, сколько рублей мы выигрываем за счет орла и проигрываем за счет решки, то частотная вероятность неопределена. Говоря о частотной вероятности, мы имеем в виду целое число - число событий, когда выпал, например, орел. Следовательно, мы должны производить какое-то осреднение по всем возможным частотам. Спрашивается, как произвести такое осреднение, чтобы оно было достаточно естественным. Например, можно осреднять арифметически, т.е. просто взять сумму по всем возможным исходам и разделить на число этих исходов.

Это обычное, честное осреднение не учитывает психологические факторы и факторы обмана. Если имеет место жульничество, то вовсе не каждый раз выпадает орел (иначе жулика разоблачат). Но если

число бросаний N стремится к бесконечности, то вероятность выпадения орла равна единице. Возникает, может быть, самый сложный вопрос: каково распределение при $N \to \infty$, сходящееся к единице, если N велико. Иначе говоря, асимптотика этого распределения такова, что лишь при $N = \infty$ вероятность выпадения орла равна единице.

Та "предельная арифметика" (идемпотентный анализ или тропическая математика) недостаточна, если $N \approx 100$, поскольку $\ln N$ уже недостаточно большая величина.

Эта проблема встает не только в экономике и теории вероятностей, учитывающей матпсихологию, но и в физике она полностью не решена, и ее старые постулаты требуют ревизии, согласно современным экспериментам [2].

2.2 Как учесть принцип неопределенности Дж.Сороса

Если мы просуммируем по всем исходам и разделим на число, которое равно сумме всех математических ожиданий, то это будет довольно естественное среднее, естественное в том отношении, что если ко всем значениям случайной величины прибавляется одна и та же константа и осредняется, то в результате мы получаем эту константу, умноженную на число M – число всех испытаний. Если значения всех случайных величин почти одинаковы, то в результате осреднения мы получаем почти ту же самую случайную величину. (Значение случайной величины, случайные числа в общем положении не совпадают, а когда совпадают, то это исключение, и законы таких исключений должны быть отдельно изучены). Иначе осреднение не имело бы смысла. Именно такой факт - добавления константы к значению случайной величины и получение в результате осреднения этой константы, умноженной на число испытаний, - должен лежать в основе осреднения (первая аксиома).

С другой стороны, если все же вероятности (частоты) точно известны, то осреднять не надо и ответ должен быть равен тому, который известен в теории вероятностей, точному выигрышу или матожида-

[2] Даже факт, который следовал из старой статфизики относительно того, что при температуре равной нулю все молекулы перестают двигаться, был опровергнут, когда обнаружилось, что жидкий гелий при температуре равной нулю (сверх)течет.

нию, умноженному на число испытаний (вторая аксиома).

Математическое ожидание - это и есть выигрыш с точки зрения экспериментальной вероятности – N_i (сколько раз выпал, например, орел), умноженное на величину выигрыша. Точно так же это могут быть кости, и тогда выигрыш будет, как это называют в теории вероятностей, значением случайной величины. Эти значения случайной величины, умноженные на числа выпадения этих значений, и есть общий выигрыш. Это число, деленное на число бросаний, есть обычное определение математического ожидания. Так, если мы осредним по всем возможным выигрышам и проигрышам и возьмем среднее арифметическое по всем возможным вариантам выигрышей-проигрышей, то добавление константы к значению выигрышей для каждого выпадения того или иного числа при игре в кости, удовлетворяет этому условию.

Но повторяю, если банки дают по вкладам устойчивые разные проценты, то эта информация распространяется достаточно быстро, и нелинейным образом возрастают вклады в соответствующие банки (нелинейность - третья аксиома).

2.3 Статистика купюр одного достоинства

Теперь перейдем к другому моменту, который существенно отличает теорию, изложенную здесь, от классической теории вероятностей.

Как уже говорилось выше, с точки зрения числа вариантов ситуация с купюрами очень близка к квантовой теории так называемых бозе-частиц, которые неразличимы, и когда мы их меняем местами, от этого ничего не меняется. Это свойство денежных знаков должно лечь в основу тех математических законов, которые выводятся для рыночной экономики (четвертая аксиома).

Итак, экономическая математика базируется на четырех существенных моментах, которые не учитывались в классической теории вероятностей. Основной из них - это "принцип неопределенности вероятности". Я называю его "принципом Сороса". Второй важнейший принцип - принцип тождественности купюр, который можно опреде-

лить как "деньги не пахнут".

2.4 Ненормированное математическое ожидание

Сумма денег N, которые вкладчик может разместить по другим n банкам (или на которые он может купить акции), - также некоторая переменная величина, зависящая от ряда факторов. Ей естественно сопоставить свое значение случайной величины λ_{n+1}. Это, например, может быть процент λ_{n+1} , который он должен платить в банк A (или же, если таковая сумма у него есть в наличии, то получить от банка A, если он всю ее положит в этот банк).

Следовательно, сумме N (а это с точки зрения теории вероятностей есть "число испытаний") отвечает в свою очередь значение случайной величины λ_{n+1}. И значит, у нас имеется уже $n+1$ значений случайной величины и дополнительное условие $N = \sum\limits_{i=1}^{n} N_i$.

Есть еще один аргумент, почему я рассматриваю не частоты, т.е. отношение числа индексов N_i к числу испытаний N, а у меня участвует и само число испытаний N.

Дело в том, что так называемый биномиальный закон распределения содержит члены $N_i!$ и если не использовать асимптотику по формуле Стирлинга, то это распределение не может быть представлено через отношение (частоту) $\frac{N_i}{N}$. Отмечу, что А.Н.Колмогоров в работе 1962 года вернулся к частотной теории фон Мизиса, а значит, вышеприведенный фактор не учитывал. Однако в работе 1969 года по теории сложности он уже не использовал отношения (частоты), и оказалось [14], что первые два члена асимптотики в формуле Стирлинга для энтропии биномиального распределения ближе к колмогоровской сложности, чем один первый. Это значит, что концепция, которую я предлагаю, ближе к теории сложности, чем к частотной теории фон Мизиса.

Мы таким образом учитываем при $N \to \infty$, члены которых N_i—конечны, например, равны 1, 2 или 5, и следовательно, вероятность их выпадения практически равна нулю, однако может иметь место вмешательство "дьявола", как это принято сейчас говорить в математике.

Известно странное правило, что если человек в первый раз играет в рулетку, то ему везет и он выигрывает. Это "правило" настолько часто реализуется, что разумного человека, не верующего в дьявола, наводит на мысль, что держатели казино жульничают, чтобы специально завлечь нового человека и ввести его в азарт.

Могу, однако, привести случай из моей жизни. Мне было лет 14. Отец повел меня на бега, дал денег и сказал: "Ты играешь в первый раз – тебе повезет". Лошади были под номерами, и всего участвовало в забеге, насколько я помню, 12 лошадей. Правда, я стоял в очереди в кассу и слышал, какие номера называли другие играющие. Лошадей я не знал и не различал. Надо было поставить на пару: номер лошади, которая придет первой, и номер лошади, которая придет второй. Вероятность того, что я правильно назову номера, практически была равна нулю. Однако я выиграл. Это произвело на меня такое впечатление, что я поставил на пару и во втором заезде, и снова выиграл. Причем, во втором заезде не очень много, т.к. первой я назвал "фаворита", которого многие называли, а в первом заезде я поставил на неожиданную лошадь, и выигрыш был большим. Возможно, во второй раз я прислушивался к очереди более внимательно.

Для отца был существен момент, что шанс не равен нулю, как это следовало бы из частотной теории. Правило "дьявола": „новичку везет“ – я испытал на собственном опыте. И отец рискнул суммой денег в варианте, который противоречил как частотной теории, так и просто здравому смыслу. Это относится к области все той же психологии, которая, как уже говорилось, играет такую существенную роль в рыночной математике.

В примере с игрой на бегах я отмечу одно существенное обстоятельство. Отец дал мне небольшую сумму денег, т.е. рискнул небольшой ставкой. А значит, ставка (значение случайной величины) зависело в данном случае от вероятности выигрыша. По существу на этом основаны все лотереи - вероятность маленькая, но и ставка маленькая, зато возможен большой выигрыш. Случай зависимости ставки от частотной вероятности мы специально рассмотрим ниже.

Таким образом, мы должны учитывать очень маленькие частоты

(вероятности), когда $N_i \ll N$.

Противоположная ситуация возникает в так называемом "петербургском парадоксе". Богатый игрок ставит ставки на красное или черное (или, что то же самое, играет в орла-решку), так что после проигрыша он увеличивает ставку в два раза, а после выигрыша сразу забирает деньги. Значит, если у него достаточно много денег, то он всегда выигрывает.

Однако если учесть, что денег у него конечное количество, то очень мала вероятность того, что он сразу проиграет большую сумму денег. Чтобы не было парадокса, необходимо учитывать очень малые частоты.

В продолжение психологической темы скажу, что я похвастался многим моим знакомым мальчикам, и все они захотели играть на бегах. Замечу мимоходом, что система заражения вирусом удачи (как и обычным вирусом) действует сильнее всего на близких знакомых.

Таким образом, роль случая, когда N_i много меньше чем N, может играть в финансовой математике весьма существенную роль.

Математическое ожидание (или выигрыш), которое обычно записывается в виде $M = \frac{1}{N}\sum \lambda_i N_i$, где λ_i – значение случайной величины ("процент" или "ставка"), а $\frac{N_i}{N}$ – частоты, N_i – исходы, N – число испытаний, теперь может быть записано как "ненормированное" матожидание $\lambda_i N_i$. В аксиоматике Колмогорова $M = \sum \lambda_i P_i, \quad \sum P_i = 1$. Однако в литературе часто встречается и ненормированное матожидание, когда $\sum P_i \neq 1$, при этом $\sum P_i < 1$. Мы рассматриваем также ненормированное матожидание, но $\sum P_i = N \geq 1$.

2.5 Значение случайных величин – случайные числа

В обычной теории вероятностей, начиная от фон Мизиса, в математическом ожидании M, которое является скалярным произведением набора частот выпадения $\frac{N_i}{N} = P_i$ (вероятностей) на набор значений случайных величин λ_i $M = \sum \lambda_i P_i$, "случайными" считались исходы N_i, например, сколько раз выпал орел N_1 или решка N_2 в игре в ор-

лянку при N бросаниях. В этой игре можно считать $\lambda_1 = 1$, а $\lambda_2 = -1$ (рубль выигрываем, рубль проигрываем). Но если (в частности в зависимости от предыдущих выпадений) мы меняем ставки, как в игре в рулетку, то именно эти ставки мы можем можем считать случайными действительными числами. Такой концепции мы придерживаемся в нашей аксиоматике, тем более лингвистически естественно случайными числами считать значения случайной величины.

Отмечу, что в "общем положении" случайные числа между собой не совпадают.

Что такое понятие "общего положения"? Оно похоже на понятие "почти все". Если кривая расположена в плоскости, то в "общем положении" она не совпадает с координатной осью. Если даже случайно и совпадает, то достаточно немного "пошевелить" оси координат, и она уже не будет совпадать с координатной осью. Более того две производные гладкой кривой в одной точке не будут в "общем положении" равны нулю. Достаточно немного "пошевелить" оси координат, и такая точка исчезнет.

Однако мы можем поставить дополнительное условие на кривые, что две производные равны нулю в одной точке, и рассматривать такой класс кривых в общем положении при этом условии. Это условие существенно изменит класс кривых в "общем положении".

Точно так же случайные значения действительных чисел "вообще говоря" или "почти всегда" не будут иметь совпадающих значений. Но это не значит, что мы не можем поставить дополнительное ограничение и потребовать, чтобы k точек совпадало, и рассматривать случайные значения при этом дополнительном условии, что существенно может изменить класс новых случайных значений при этом дополнительном условии.

3 Обзор математических выводов

Сегодня нелинейный характер сложения (и следовательно осреднения) доходов настолько очевиден, что о нем стали говорить даже в прессе, когда речь идет о слиянии банков. Поэтому не будем останавливаться

более подробно на примерах этого эффекта. Отметим лишь, что сложение доходов не исключает и обычной арифметики. Все зависит от конкретной ситуации. Поэтому когда сложение нелинейно (полукольцо), в этом случае обычно присутствует и линейное сложение, являющееся в этом полукольце "умножением".

3.1 Средние значения

Самое простое осреднение двух чисел a и b есть арифметическое среднее

$$M = \frac{a+b}{2}. \tag{1}$$

Из системы аксиом, которые обсуждались с крупнейшими финансистами-экономистами, получалось следующее нелинейное обобщение среднего, зависящего от некоторого параметра β, т.е. некоторое однопараметрическое семейство средних, которое при $\beta = 0$ равно арифметическому среднему (1)

$$M_\beta = \frac{1}{\kappa\beta}\ln(\frac{e^{\kappa\beta a}+e^{\kappa\beta b}}{2}), \tag{2}$$

$\kappa = \pm 1,\ \beta > 0$. Очевидно, что $\lim_{\beta\to 0} M_\beta = \frac{a+b}{2}$.

В некотором отношении среднее M_β "наиболее близко" к линейному в том смысле, что среднее M_β от $a+\alpha$ и $b+\alpha$, где $\alpha-$ некоторое число, равно $M_\beta + \alpha$

$$\frac{1}{\kappa\beta}\ln(\frac{e^{\kappa\beta(a+\alpha)}+e^{\kappa\beta(b+\alpha)}}{2}) = \frac{1}{\kappa\beta}\ln e^{\kappa\beta\alpha}(\frac{e^{\kappa\beta a}+e^{\kappa\beta b}}{2}) = \alpha + \frac{1}{\kappa\beta}\ln e(\frac{e^{\kappa\beta a}+e^{\kappa\beta b}}{2}). \tag{3}$$

В этом смысле это нелинейное осреднение самое близкое к линейному в силу этого свойства. Суммирование вида $a \oplus b = \frac{1}{\kappa\beta}\ln(e^{\kappa\beta a}+e^{\kappa\beta b})$ приводит к коммутативному полукольцу $a \otimes b = a \oplus b$, обладающему ассоциативностью и дистрибутивностью и в пределе при $\beta \to \infty$ приводящему к полукольцу $(max, +)$ или $(max, \times)$, если $\kappa = 1$ и к $(min, +)$ или $(min, \times)$, если $\kappa = -1$ (см. [1]).

В частотной теории вероятностей среднее, или "математическеое ожидание" определяется, как известно, следующим образом. Если $\lambda-$ случайная величина, принимающая значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, а $\frac{N_i}{N}$ - частотные вероятности ее появления (N_i - частота появления значения λ при

N испытаниях), то среднее, или матожидание равно

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i N_i}{N}. \tag{4}$$

Очень часто рассматривается $E = EN = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i N_i$, которое равно доходу, выигрышу и т.д. (см. [15]).

Прежде всего нашей задачей является обобщение семейства средних M_β на осреднение матожиданий, когда вероятности неопределённы, так называемая естественная неопределенность. Предварительно отметим некоторые свойства пары $\{\lambda_i, N_i\}$ и соответствующие аналогии. Величина λ_i не нормируется, не имеет "удельного значения", а N_i может быть нормирована; $\frac{N_i}{N}$ - вероятность или ее "удельное значение". Такого рода "сопряженные" пары встречаются в разных областях: экономике, физике частиц, термодинамике и других. Так, если λ_i - уровень энергии, а N_i - число (бозе) частиц, сидящих на уровне λ_i, то $\sum \lambda_i N_i$ есть энергия всей системы, отвечающей уровням $\{\lambda_i\}$. Если $\lambda_1 = T$ - температура, N_1- энтропия, λ_2- давление, а $v-$ объем системы в термодинамике, то энтропия и объем имеют удельные значения, а температура и давление не имеют. Первые называются экстенсивными величинами, а им "сопряженные" - интенсивными.

В экономике пары λ_i и N_i могут соответствовать, например, следующим объектам: λ_i товары, а N_i - число людей, купивших данный товар, или λ_i - процент, полученный из i-того банка, N_i - количество рублей, положенных в $i-$тый банк; λ_i средняя цена, а N_i - объем продукции; λ_i - средняя зарплата, N_i - численность людей, ей отвечающих.

В различных ситуациях число β также может означать разные величины: в термодинамике всегда $\kappa = -1$, $\frac{1}{kT}$, где T - температура, k - постоянная Больцмана; в экономике - покупательная способность данной валюты, или индекс Доу-Джонса, или величина, пропорциональная индексу, отвечающему за данную отрасль. Некоторые специалисты по эконофизике связывают температуру с волатильностью и т.д.

3.2 Осреднение по случайным величинам

Каждой случайной величине λ_k отвечает "доход" или "расход" $x_{\lambda_k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i N_i$, где λ_i - значение случайной величины, а N_i - частота ее выпадений, равная числу ее выпадений, т.е. частотной вероятности, умноженной на число испытаний.

Если $\kappa = -1$, то среднее отвечает покупателю, который хочет как можно выгоднее купить, т.е. как можно меньше потратить денег. Его средний расход в силу формулы (2) при данном β будет равен

$$M_\beta = -\beta \ln \sum_{k=1}^{L} \frac{e^{-\beta x_{\lambda_k}}}{L}. \tag{5}$$

M_β будем называть глобальным осреднением по всему набору случайных величин $\{\Lambda_k\}$.

Для простоты положим, что только два значения случайной величины отличны друг от друга

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{G_1}, \quad \lambda_{G_1+1} = \lambda_{G_1+2} = \ldots = \lambda_n \neq \lambda_{G_1}. \tag{6}$$

Доходы, т.е. возможные матожидания, умноженные на число испытаний, будут иметь вид

$$x_i = \lambda_1 \sum_{j=1}^{G_1} N_j^{(i)} + \lambda_2 \sum_{j=G_1+1}^{n} N_j^{(i)}. \tag{7}$$

Если мы хотим осреднить по всем N_j^i (по всем возможным вероятностям), точнее по всем возможным выпадениям чисел λ_1 и λ_2, то нетрудно подсчитать

$$\begin{aligned} M_\beta &= \\ &= \frac{1}{\kappa\beta} \ln \left(\frac{1}{N+1} \sum_{\widetilde{N}_1=0}^{N} \frac{(G_1+\widetilde{N}_1-1)!}{(G_1-1)!\widetilde{N}_1!} \frac{(G_2+\widetilde{N}_2-1)!}{(G_2-1)!\widetilde{N}_2!} \exp\Big(\kappa\beta(\lambda_1\widetilde{N}_1+\lambda_2\widetilde{N}_2)\Big) \right) = \\ &= \frac{1}{\kappa\beta} \ln \left\{ \frac{1}{N+1} \sum_{\tilde{N}_1=0}^{N} \exp\left[\kappa\beta(\lambda_1\tilde{N}_1+\lambda_2\tilde{N}_2) + \sum_{i=1}^{2} \ln\left(\frac{(G_i+\widetilde{N}_i-1)!}{(G_i-1)!\widetilde{N}_i!} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\tilde{N}_2 = N - \tilde{N}_1$. Если $G \gg 1$, $N \gg 1$, то можно применить формулу Стирлинга и тогда выражение (8) будет совпадать с формулой для свободной энергии идеального Бозе-газа [16].

Главный вклад для M_β при этих условиях и $N \to \infty$, если $\kappa = -1$, дает минимум выражения, стоящего под знаком экспоненты $E(\tilde{N}_1) = \beta(\lambda_1 \tilde{N}_1 + \lambda_2 \tilde{N}_2) + \sum_{i=1}^{2} \ln\left(\frac{(G_i+\tilde{N}_i-1)!}{(G_i-1)!\tilde{N}_i!}\right)$, обозначим через $\tilde{N}_i^0$ этот минимум; а если $\kappa = 1$ (при продаже) – максимум этого выражения, снова через $\tilde{N}_i^0$ обозначим этот максимум, что не приведет к путанице. Бозе-статистика естественна для денежных единиц (купюр).

Замечание 1. Если априори поставить условия (2) для M_β, т.е. $M_\beta\{\lambda_i + \alpha\} = M_\beta\{\lambda_i\} + \alpha$, и условие на статистику вида (6) - (8) (купюры подчиняются бозе-статистике), то *единственное* нелинейное осреднение будет именно осреднение (2).

Замечание 2. Пусть $\beta \to \infty$, тогда если $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, то $M_\beta = N\lambda_1$. При интерпретации этого факта можно, как обычно, рассмотреть игру в орла и решку. При выпадении орла игрок выигрывает λ_1 руб., а при выпадении решки λ_2 руб. При N бросаний согласно обычной теории вероятностей он выигрывает $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}N$ рублей. В нашем случае он выигрывает $\lambda_1 N$ рублей, т.е. существенно больше, чем при стандартном подсчете. Это означает, что в нашем случае игрок согласно новым (капиталистическим) правилам или жульническим образом после бросания монеты и выпадения решки переворачивает ее на орла. Если монету кинули N игроков из одной команды, то они по очереди переворачивают монетки, при каждом переворачивании увеличивая доход, пока не достигнут максимума $N\lambda_1$. Так что значения $N\lambda_1$ как бы являются положением равновесия, а поочередное переворачивание монеты - элементарный процесс, который после случайного выпадания монет у N игроков приводит к этому равновесию. Каждый переворот монетки на $(\lambda_1 - \lambda_2)$ увеличивает выигрыш. Мы получаем, таким образом, некоторый монотонный беспроигрышный процесс, приводящий к равновесному состоянию максимального выигрыша.

Подобно тому, как это имеет место в статфизике, введем определе-

ние энтропии S

$$S = \frac{\partial M_\beta}{\partial \frac{1}{\beta}} = -\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{2} \ln\left(\frac{(G_i + \widetilde{N^0}_i - 1)!}{(G_i - 1)!\widetilde{N^0}_i!}\right). \qquad (9)$$

Переменная β в различных задачах экономики может иметь, как было сказано, разную интерпретацию. Энтропия – сопряженная $\frac{1}{\beta}$ – экстенсивная величина связана с колмогоровской сложностью [17], которая интуитивно кажется более естественным понятием.

При $\beta \to \infty$ энтропия (а с ней и колмогоровская *сложность*) стремится к нулю. Реально в экономических задачах β достаточно замысловатая величина, а не только покупательная способность той валюты, в которой ведется расчет. Иногда более ясно не уменьшение β, а увеличение *сложности* бизнес расчета, т.е. энтропии. Например, человек кладет вклад в банк "Чара", а владелец МММ арестован, хотя это прямо его не касается, но сложность его бизнес-расчета увеличивается, что, в свою очередь, означает уменьшение β.

Пример 1. Рассмотрим пример важного явления в экономике. Пусть λ_1 – процент, который получает вкладчик в пирамидах - трех банках (МММ, Чара-банк, Властелина), т.е. $G_1 = 3$, а $\lambda_2 < \lambda_1$ процент, который он получает в других стандартных банках $G_2 \gg 1$, где $\frac{1}{\beta}$ – "температура" общества, иначе говоря, ажиотаж, который увеличивается за счет быстрой передачи информации о крупных выигрышах от одного члена общества к другому.

У вкладчика имеется N купюр. Пока ажиотаж мал, β велико, максимум экспоненты достигается при $N_1 = N$, т.е. все деньги выгодно вложить в пирамиды. Финансовое осреднение дохода будет максимально. Когда ажиотаж увеличивается, вкладчик часть денег на всякий случай должен переложить в стандартные банки. Когда же ажиотаж достигает некоторой точки β_0, то сразу (почти) все деньги вкладчик должен изъять из пирамиды и переложить в стандартные банки. При β_0 происходит "фазовый переход" (см. рис. 1). (Математически этот переход аналогичен переходу в бозе-газе из конденсатного состояния в нормальное.)

Хотя эффект в экономике вполне разумен, но вопрос заключает-

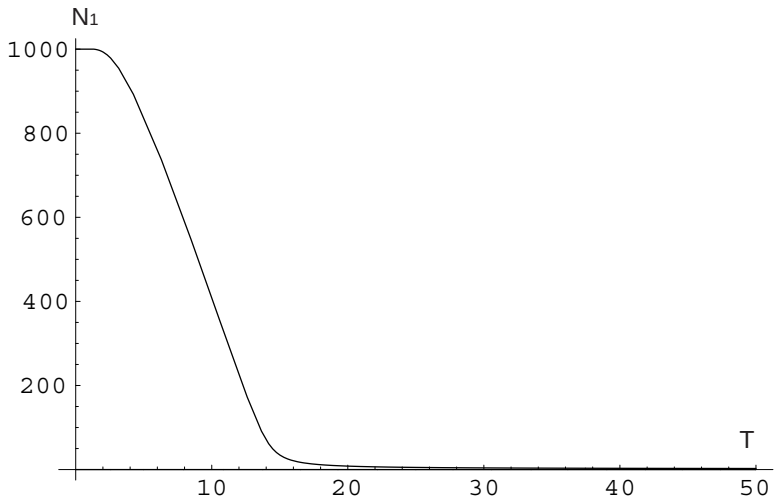

Figure 1: При $T = 20$ число акций, вложенных в пирамиды, практически равно нулю.

ся в том, как определить β_0 или "колмогоровскую *сложность*" нашей задачи[3]. Так что нельзя сказать, что мы даем рецепт, однако знание эффекта редуцирует задачу к некоторой другой, также достаточно сложно рассчитываемой, особенно если много людей втянуто в эту авантюру. Рассмотрим другой пример.

Пример 2. Ниже покупателя акций будем называть игроком. Пусть существует всего два типа акций, первый условно будем называть "дешевыми" акциями, а второй — "дорогими". Будем считать, что игрок покупает пакет из N акций, в котором количество дешевых акций равно N_1, а количество дорогих акций соответственно равно $N_2 = N - N_1$. Игрок тратит деньги на покупку акций, при этом покупаемое количество акций оказывает влияние на цену акций обоих типов. В частности, чем больше дорогих акций покупает игрок, тем дешевле их ему продадут. Поэтому далее будем считать, что расход игрока на пакет акций зависит от количества купленных дешевых и дорогих акций нелинейно. Например, квадратичным образом:

$$E(N_1) = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 - \frac{\gamma N_1^2}{2N} - \frac{\gamma N_2^2}{2N} = \lambda_2 N - \frac{\gamma N}{2} + (\lambda_1 - \lambda_2 + \gamma) N_1 - \frac{\gamma N_1^2}{N}, \tag{10}$$

где числа λ_1, λ_2, γ удовлетворяют условиям:

$$\frac{\gamma}{2} < \lambda_1 < \lambda_2, \qquad \lambda_2 - \lambda_1 < \gamma < 2(\lambda_2 - \lambda_1). \tag{11}$$

Из условий (11) следует, что функция (10) при $N_1 = 0, 1, \ldots, N$ имеет глобальный минимум при $N_1 = N$ и локальный минимум при $N_1 = 0$.

Если в начальный момент игроку досталось N_1 дешевых акций и N_2 - дорогих, причем $N_1 < \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \gamma}{\gamma} N$, то продавая по одной акции и покупая по одной акции дешевых и дорогих так, чтобы $E(N_2)$ уменьшилось, он придет к локальному минимуму $N_1 = 0$, т.е. купит все дорогие акции. Если же ему досталось $N_1 > \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \gamma}{\gamma} N$, то он придет в результате монотонного процесса к тому, чтобы купить все дешевые акции.

Рассмотрим теперь локальные финансовые осреднения дохода игрока. Будем считать, что дешевые акции игрок может купить у G_1

[3]Отметим, что колмогоровская сложность определяется через длину оптимального кода, являющегося нелинейным средним вида (2) от всевозможных кодов.

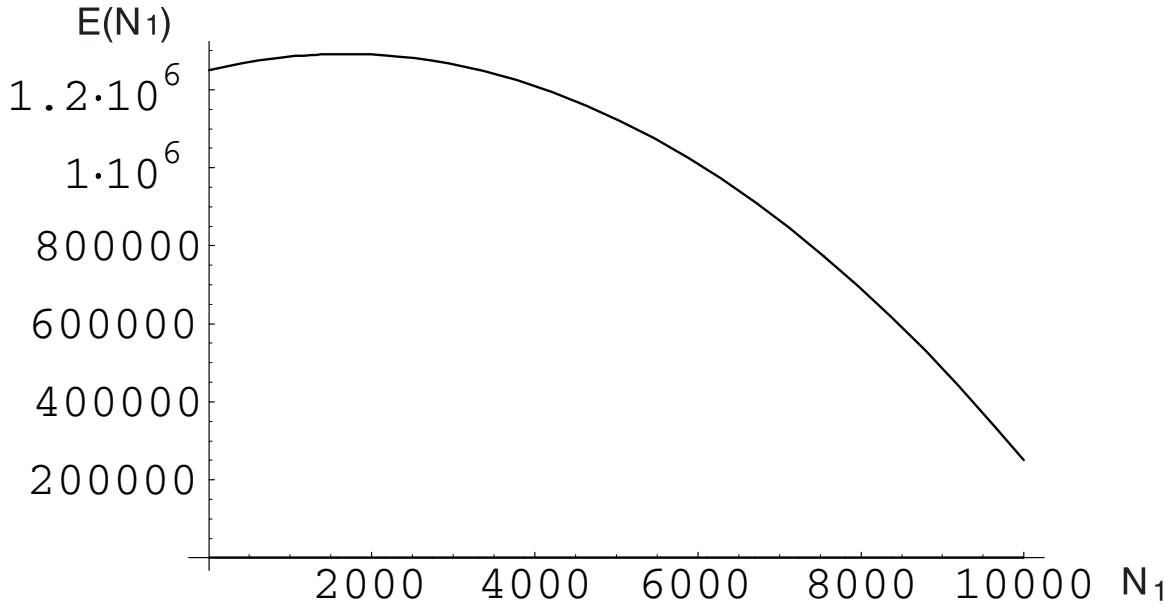

Figure 2: График $E(N_1)$ при $T = 0$

дилеров, а дорогие — у G_2 дилеров. В таком случае количество разных способов, которым игрок может купить пакет акций равно

$$\Gamma(N_1) = \frac{(N_1 + G_1 - 1)!}{(G_1 - 1)!N_1!} \frac{(N - N_1 + G_2 - 1)!}{(G_2 - 1)!(N - N_1)!}. \tag{12}$$

Замечание. Вместо введения разных дилеров можно было бы считать, что самих дешевых и дорогих акций соответственно G_1 и G_2 разных типов, которые стоят одинаково.

Предположим, что при $\beta = \infty$ игрок находится на локальном минимуме $N_1 = 0$. Поскольку он пробует менять попарно и постепенно (монотонно) акции так, чтобы его расход не увеличивался [4], то осреднение мы можем рассматривать лишь в окрестности точки локального минимума (локальное финансовое осреднение). Если β медленно меняется, а $N \to \infty$, то асимптотика M_β при $N \to \infty$ вновь будет отвечать локальному минимуму

$$\begin{aligned} E(N_1) = \beta(\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 - \frac{\gamma N_1^2}{2N} - \frac{\gamma N_2^2}{2N}) + \\ + \ln \frac{(N_1 + G_1 - 1)!}{(G_1 - 1)!N_1!} \frac{(N - N_1 + G_2 - 1)!}{(G_2 - 1)!(N - N_1)!}. \end{aligned} \tag{13}$$

На рисунке 4. изображена зависимость энтропии от температуры и локального и глобального минимумов.

В точке $T \approx 40$ кривая обрывается. В этой точке производная $\frac{\partial S}{\partial T}$ обращается в бесконечность, и модификация метода Лапласа, который можно было применить для асимптотики локального M_β в других точках, не применима в окрестности этой точки. И подсчет локального минимума на компьютере дает неустойчивое "разбалтывание". Оказывается, асимптотика вблизи этой точки выражается через функцию Эйри от мнимого аргумента, и этот факт снимает все вышеперечисленные проблемы.

При $T > 40$ равновесия при малом изменении покупки-продажи нет. Поэтому, чтобы попасть на точку равновесия, образованную в результате изменения локального осреднения вблизи другого локального минимума, надо сразу поменять большое количество акций (см. рис.4).

[4] принцип наименьшего риска в экономике

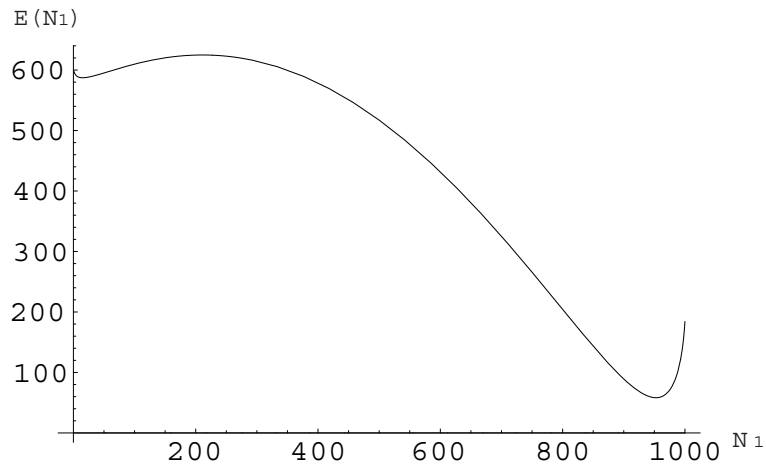

Figure 3: График $E(N_1)$ $T = 5,\ G_2 = 30,\ \gamma = 1.5$

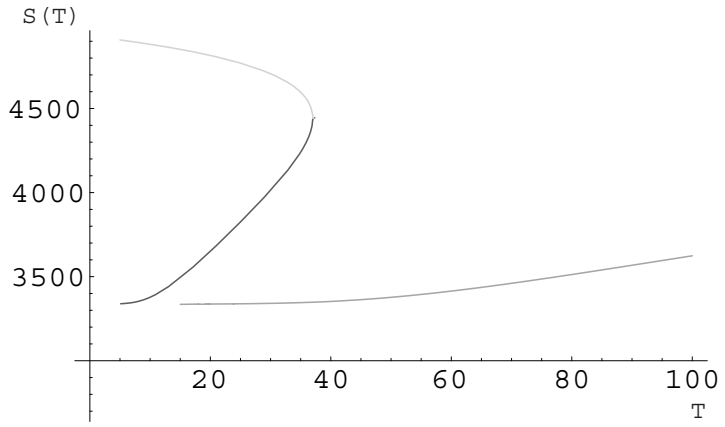

Figure 4: Жирная линяя – локальный минимум, под ним глобальный минимум. В точке $T = 40$ локальный минимум и глобальный максимум совпадают и при $T > 40$ не продолжаются.

Аналогичная ситуация возникает, когда $\kappa = 1$ и игрок хочет как можно больше выиграть. Тогда минимальные точки заменяются на максимальные, между которыми при квадратичной зависимости от N_1 и N_2 имеется минимум. При изменении T от нуля до некоторого T_0, при котором исчезает локальный максимум, происходит скачок, который можно трактовать как пробой курса акций. В нашем случае игрок, если совершит быструю одновременную продажу большого числа одних и покупку большого числа других акций, то попадет снова на точку равновесия.

Мы рассмотрели лишь простейшую модель. В более сложной экономической ситуации, когда задействованы массы народа, они не могут быстро перестроиться, переходя, например, от привычной потребительской корзине к другой и меняя свой образ жизни. Тогда точки равновесия (баланса) вообще нет, и резкий дисбаланс приводит к общему дефолту.

Обобщение. В нашем примере мы получили одномерную кривую, отвечающую локальному минимуму зависимости энтропии от "температуры" в двумерном пространстве S, T и рассматривали ее проекцию на ось T в точке T_0. Эта проекция не является "хорошей", и мы говорили. что асимптотику M_β в окрестности этой точки нужно заменить функцией Эйри.

Какая картина возникает в общем случае, когда у нас имеются две "сопряженные" пары энтропия-температура, и, например, число людей N, отвечающих некоторому среднему заработку ε_k.

В этом случае рассматривается 4-х мерное (фазовое) пространство, где „координаты“- T, ε и „импульсы“- N, S. Поверхность, соответствующая нашей кривой, будет двумерной и (локально) может быть записана в параметрической форме

$$T = T(\alpha_1, \alpha_2), \quad \varepsilon = \varepsilon(\alpha_1, \alpha_2), N = N(\alpha_1, \alpha_2), S = S(\alpha_1, \alpha_2),$$

где α_1, α_2 параметры.

Поскольку она должна быть получена (по крайней мере, в простых точках проектирования на "координатную" плоскость) из асимптотики сумм вида (2), то она должна быть лагранжевым многообразием

(понятие введено автором в [18]). В точках "плохого проектирования" на плоскость T, ε асимптотика дается туннельным каноническим оператором [18], а его упрощение в зависимости от вида поверхности вблизи точки "плохого проектирования" может быть получено, используя работу [19].

Эти общие соображения могут помочь сконструировать соответствующую модель данной экономической ситуации, если есть подходящие статистические данные.

3.3 Связь с термодинамикой квантовой жидкости

Существенный раздел экономики рассматривает, как при малых изменениях некоторых внешних параметров меняется равновесие системы. Пусть система находилась в некотором равновесии. Малое изменение параметров выводит ее из состояния равновесия – система разбалансируется, но через некоторое время приходит в новое равновесие (сбалансируется). Рассматриваются "уравнения состояния" зависимости таких точек равновесия от изменения параметров (comparative statics). Точно так же равновесная термодинамика рассматривает ситуацию, когда при изменении, например, температуры вначале равновесное состояние исчезает, происходят некоторые динамические процессы, которые вновь приводят ее в равновесие. Эти динамические процессы и время их релаксации исключаются из рассмотрения. Уравнения состояний термодинамики определяют $n-$мерное лагранжево многообразие в $2n-$мерном фазовом пространстве [20, 21]. Далее рассматривается проектирование этого лагранжева многообразия на координатную суперповерхность интенсивных величин.

Термодинамика является пределом статистической физики при числе частиц N, стремящемся к бесконечности. Главным членом этой асимптотики является туннельный канонический оператор на данном лагрангжевом многообразии, на котором малым параметром служит $\frac{1}{N}$, где N – число частиц [20, 21].

Аналогом пробоя курса акций является следующее явление фонтанирования, которое еще в 1938 году было обнаружено Дж.Алленом и

Х.Джонсом, По капилляру диаметром 10^{-4} см "течет" сверхтекучий жидкий гелий. В некоторой точке капилляра делается маленькая дырочка, и гелий около этой точки подогревается светом, превращаясь в нормальную жидкость. Нормальная жидкость является вязкой и из-за этого не может проникнуть в столь тонкий капилляр. тогда из дырочки начинает бить фонтан высотой в 14 см. Слово "течет" поставлено в кавычки, т.к. сверхтекучее состояние не есть течение, не есть динамика, а является таким же состоянием для жидкости, как лед или пар. Поэтому это состояние после нагревания переходит в нормальное и при этом в точке перехода бьет фонтан. С математической точки зрения это физическое явление аналогично экономическому явлению пробоя курса акций. О других следствиях финансового осреднения см. [30].

Отметим в заключение, что по существу основные эффекты связаны с предельным переходом при $N \to \infty$, т.е. идемпотентным анализом [1], на языке которого могут быть изложены и другие матэкономические работы [37, 38, 39, 40, 41] и работы, связанные с выпуклым анализом [23]. Тогда легко перейти к описанному выше полукольцу, а значит получить следующие члены асимптотики по N, а также уточнить модели, используя эмпирические данные вблизи точек особого проектирования.

Предложенное осреднение и соответствующее полукольцо [35] связывает естественным образом компаративную статику и компаративную динамику в экономике с термодинамикой квантовой жидкости, а в случае больцмановской и фермиевской статистики с обычной термодинамикой [33] и термодинамикой сверхпроводящих материалов. Аналогии с обычной термодинамикой бродят по Европе, как известный призрак. Данная статья является попыткой введения в соответствующий манифест [34]. Эта и другие мои работы на эту тему появились после того, как мой прогноз развития экономики в нашей стране, основанный на предельном полукольце, оправдался (см.[12]). Беседы с доктором экономических наук В.Н.Батуриным подвигли меня на реанимацию и развитие этой концепции, за что я ему искренне признателен. Выражаю также глубокую благодарность А.Чуркину за помощь

в построении графиков.

References

[1] V.P.Maslov. Methodes operatorielles. Mir, Moscou, 1987

[2] V.N.Kolokoltsov, V.P.Maslov. Idempotent analysis and its applications. Kluwer Academic Publishers, 1997

[3] A.Pollatsek, A.Tversky. A theory of risk. Journal of Math. Psychology. 1970, 7, 540-553

[4] R.D.Luce, E.U.Weber. An axiomatic theory of conjoint, expected risk. Journal of Math. Psychology. 1986, 30 (2), 188-205

[5] P.C.Fishburn. Foundation of risk measurement. I. Risk as probable loss effects. Management science. 1984, 30 (4), 396-406

[6] P.C.Fishburn. Foundation of risk measurement. II. Effects of gains on risk. Journal of Math. Psychology. 1984, 25, 226-242

[7] E.U.Weber. Combine and conquer: A joint application of conjoint and functional approaches to the problem of risk measurement. Journal of Experimental Psychology. Human Perception and Performance. 1984, 10, 179-194

[8] П.Массе. Статистика, 1972

[9] Del Moral, P. Duazi, M. Applications of Maslov's optimization theory. – Mat. Zametki. 2001 v.69, N 2. P. 262-276

[10] В.П.Маслов. Томаш Масарик и роль личности в истории. – "Вопросы философии", 2000, № 8

[11] В.П.Маслов. Как избежать полной катастрофы. – "Известия", № 187, 7 августа 1991 года, с.2

[12] В.П.Маслов. Экспертизы и эксперименты. – "Новой мир", 1991, № 1, с. 243 -252

[13] Дж.Сорос. Филосовская статья

[14] А.Н.Колмогоров. К логическим основам теории информации и теории вероятностей. – Проблемы передачи информации, 1969, т. 5, №3, с.3-7

[15] А.Н.Ширяев. Основы стохастической финансовой математики. Москва: ФАЗИС, 1998

[16] Л.Д.Ландау, Е.М.Лившиц. Статистическая физика. М.: Наука, 1976

[17] В. В. Вьюгин, В. П. Маслов. Об экстремальных соотношениях между аддитивными функциями потерь и колмогоровской сложностью. ППИ, 2003, том 39, вып. 4, с. 71-87

[18] В.П.Маслов. Теория возмущений и асимптотические методы. М.:МГУ, 1965

[19] В. И. Арнольд, А. Н. Верченко, С. М. Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений. I, II. - М.: Наука, 1982, 1984

[20] В. П. Маслов. Геометрическое "квантование" термодинамики и статистические поправки в критических точках. ТМФ, 1994,том 101, № 3, стр. 433-441

[21] В. П. Маслов. Аналитическое продолжение асимптотических формул и аксиоматика термодинамики и квазитермодинамики. Функциональный анализ, 1994, том 28, № 4, стр. 28-41

[22] V.M. Marakulin. On fuzzy cire characterizations and equilibria existence in linear vector-lattice economics. In: Advances in Math. Research, Nova Science Publishers, New-York, 2003, 19 p.

[23] G. G. Magaril-Il'yaev, V. M. Tikhomirov. Convex analysis: theory and applications. Translations of Math. Monographs. Amer. Math.Society, Providence, RI, 2003

[24] В. П. Маслов. Аппроксимационные вероятности, закон квазистабильного рынка и фазовый переход из "конденсатного" состояния. ДАН, 2003, т. 392, № 6, с. 727-732.

[25] В. П. Маслов. Среднестатистическая информация относительно выпуклой функции и общие линейные уравнения для пространства min, max.// ДАН, 2003, т. 393, №1, с. 20-24.

[26] В. П. Маслов. Интегральные уравнения и фазовые переходы в вероятностных играх. Аналогия со статистической физикой. Теория вероятностей и ее применения, 2003, т.48, в.2, с. 482-02.

[27] В. П. Маслов. Эконофизика и квантовая статистика. Мат.заметки, 2002, т.72, вып.6, с.883-91.

[28] V. P. Maslov. The notions of entropy, Hamiltonian, temperature, and thermodynamical limit in the theory of probabilities used for solving model problems in econophysics. Russian Journal of Math. Physics, 2002, v.9, n.4, p.437-445.

[29] В.П.Маслов. Аксиомы нелинейного осреднения в финансовой математике и динамика курса акций. Теория вероятностей и ее прил., 2003, т.48, вып.4, с. 799-810

[30] В. П. Маслов. Зависимость покупательной способности и среднего дохода населения от числа покупателей на специализировнном рынке и в регионе. Законы эконофизики. Докл. РАН, 2004, т. 395, №2, с. 164-168.

[31] В. П. Маслов. Расходы покупателей и скорость оборота при нелинейном финансовом осреднении. Законы эконофизики. // Докл. РАН, 2004, т.396. №2

[32] В. П. Маслов. Нелинейное финансовое осреднение, эволюционный процесс и законы эконофизики. - Теор. вероятностей и ее прил., 2004. т. 49, вып. 2, 34 с.

[33] В. П. Маслов. О точно решаемой модели сверхтекучести и фазовом переходе нулевого рода (фонтанирование). ТМФ, том 141, №3, декабрь 2004, с. 411-423

[34] В. П. Маслов. Квазистабильная экономика и ее связь с термодинамикой сверхтекучей жидкости. Дефолт как фазовый переход нулевого рода. 1. – Обозрение прикладной и промышленной математики, 2004, т.11, вып.4 с.690-732

[35] P.Lotito, J.-P.Guadrat, F.Mancinelli. Traffic assignment and Gibbs-Maslov semirings. 2004

[36] A.Dragulescu, V.Yakovenko. Statistical mechanics of money. Eur.Phys.J. B, August 4, 2004.

[37] Ch. Aliprantis, A.Alkan, N.C. Yannelis. Current Trends in Economics: Theory and Applications. Springer-Verlag, New York – Berlin, 1999

[38] Ch. Aliprantis, B.Cornet, R.Tourky. Economic equilibrium: optimality and price decentraization. Positivity 6, 2002, p. 205-241

[39] Ch. Aliprantis, Y.A.Polyrakis, R.Tourky. The cheapest hedge. J. Math. Economics 37, 2002, p. 269-295

[40] Ch. Aliprantis, D.J.Brown, J.Werner. Minimum-cost portfolio insurance. J. Economic Dynamics and Control, 24, 2000, p. 1703-1719

[41] Ch. Aliprantis, R.Tourky, N.C.Yannelis.Cone conditions in general equilibrum. J. Economic Theory, 92, 2000, p. 96-121